数　　学

数学－１（数学Ⅰ）二次関数　～二次関数の最大・最小～・・・・・・・・・ 69

事象の考察を通して二次関数の最大・最小の理解を深める事例

数学－２（数学Ⅱ）指数関数・対数関数　～対数関数（常用対数）～・・・ 73

常用対数を活用して 2^n の桁数を求めることを通して、対数関数の有用性を認識させる事例

数学－３（数学Ⅲ）平面上の曲線と複素数平面　～複素数平面～・・・・・ 79

複素数平面における基礎的事項の確認及び定着を図った事例～シンキングツール等を活用して～

数学－４（数学Ａ）整数の性質　～整数の割り算と商・余り～・・・・・・ 85

累乗の余りの一般化（フェルマーの小定理）について考えることにより、余りの性質や累乗の余りの周期性についての理解を深める事例

数学－５（数学Ａ）整数の性質　～ユークリッドの互除法～・・・・・・・ 89

図形と関連付けることにより、ユークリッドの互除法の仕組みについての理解を深める事例

数学－６（数学Ｂ）数列　～群数列～・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 95

群数列について、その特徴を分類しながら理解を深める事例

数学－１（数学Ⅰ）｜事象の考察を通して二次関数の最大・最小の理解を深める事例

【学習活動の概要】

１　単元名　　　二次関数　～二次関数の最大・最小～

２　単元の目標
二次関数の値の変化について、グラフを用いて考察したり最大値や最小値を求めたりすること。

３　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
二次関数の値の変化に関心をもち、具体的な事象の考察に二次関数の最大・最小を活用しようとしている。	二次関数の値の変化の様子について、グラフを用いて考察することができる。	二次関数のグラフや式を用いて、二次関数の最大値・最小値を求めることができる。	二次関数の最大値・最小値とその求め方について理解している。

４　単元の概要
（１）授業の概要
具体的な事象の課題に対して、まず具体物を用いて結果を予想する。その後、予想を検証するために二次関数の最大・最小の考えを用いることを見いだし、目的意識を持って解決を目指す授業である。また、解決過程を振り返ることで新たな課題を見いだし解決する活動を通して、二次関数の最大・最小の理解を深めることを目指す。
（２）教材
具体的な事象の考察に二次関数の最大・最小を活用し考察する課題として次の問題を提示する。

> 幅 20 cmの金属板の両端を直角に折り曲げて雨どいを作り、できるだけたくさんの水が通るようにしたい。金属板をどのように折ればよいだろうか。

５　単元の指導計画

次	学習活動	深い学びに関する指導上の留意点
第１次 （５）	二次関数の最大・最小 ・具体的な事象の考察に二次関数の最大･最小を活用し考察することができる。（本時２／５） ・二次関数の最大・最小について理解を深め、定義域に応じて、最大値や最小値を求めることができる。	・雨どいの形状を、具体物を用いて予想させる。 ・たくさんの水を通すためには、断面積を最大にする必要があることを見いださせる。 ・二次関数の最大・最小の考えを用いて予想を検証させる。 ・解決過程を振り返り、金属板の横の長さが一般化されたときのきまりについても検証させる。
第２次 （２）	二次関数の決定 ・二次関数のグラフについて与えられた条件から、その二次関数を定められる。	

【解説】

【指導事例と学習指導要領の関連】

「高等学校学習指導要領解説　数学編　第２章　第１節　数学Ⅰ」

３　内容と内容の取扱い

（３）二次関数

二次関数とそのグラフについて理解し、二次関数を用いて数量の関係や変化を表現することの有用性を認識するとともに、それらを事象の考察に活用できるようにする。

イ　二次関数の値の変化

（ア）二次関数の最大・最小

二次関数の値の変化について、グラフを用いて考察したり最大値や最小値を求めたりすること。

内容の取扱いについては、次のように示されている。

> 二次関数のグラフを通して、関数の値の変化を考察し、関数の最大値・最小値を求めることができるようにする。また、二次関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識し、それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする。例えば、幅 20 ㎝の金属板の両端から x ㎝のところで折り曲げて切り口が y ㎠の長方形状の雨どいを作るとき、この雨どいの断面積の最大値を求めさせることなどが考えられる。

本指導事例では、場面設定として「できるだけたくさんの水が通るようにしたい。金属板をどのように折ればよいか」と提示し、雨どいの断面積に着目してその最大値を求めることを通して、二次関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにした。その際、金属板の代わりに紙を配付したり、グループワークを取り入れたりして、生徒自身の考えを深められるよう工夫した。

【深い学びの実現に向けた工夫】

○　場面設定の工夫

教科書では「雨どいの断面積の最大値を求めよ」という例題が与えられているのに対し、今回は、生徒の深い学びを実現するために「雨どいにできるだけたくさんの水が通るようにしたい」という日常の事象に関連する場面を設定した。このことによって、与えられた問題をただ解くのではなく、事象の数量等に着目して数学的に表現することを目指した。また、雨どいの断面積に着目することにより、断面積を二次関数で表し、二次関数の最大・最小の考え方を用いる、といった見通しをもちながら問題を解決できるようにした。

○　多様な考えを比較検討

事象を数学的に表現する場面や、見通しをもって問題を解決する場面において、個人で解決したり、生徒同士で話し合ったりする時間を取り入れるようにした。その際、金属板の代わりに配付した紙を使って自分の考えを他人に説明する活動を行った。また、教師側が意図的に指名することにより、生徒が「たくさんの水が通る」と考えた理由を全体で共有できるようにすることにより、数学的に表現する際のきっかけになるようにした。

○　課題を振り返り、問題場面の一般化を促す

答えを出して終わるのではなく、解決過程を振り返ることにより、金属板の幅が一般化されたときに何か法則性が無いかどうか探らせた。雨どいの断面の縦と横の長さの比が １：２ になる場合であることを予測させ、それを検証する活動を行った。金属板の幅が具体的な数値で与えられた場合、生徒は実際に値を一つずつ代入して考えることが想定される。一方、金属板の幅を一般化し a cm とした場合は、値を一つずつ代入して考えることが困難となり、断面の縦の長さを x cm として、断面積を二次関数で表すことにより課題を解決することができる。この活動を通して、二次関数の考えを用いて課題を解決することの有用性を一層実感させることができる。

授業プリント No. 4　（　　月　　日　　時間目）　　　　生徒番号（　　　　　）氏名（　　　　　　　　　　　）

本時の課題

　幅 20cm の金属板の両端を直角に折り曲げて雨どいを作り、そこにできるだけたくさんの水が通るようにしたい。
　金属板をどのように折ればよいだろうか。

①各自で折り方を予想しましょう。
②他の人と予想を共有しましょう。
③予想の検証をしましょう。

＜自分の考え＞

＜他の人の考え＞

（授業メモ欄）

④解決過程を振り返りましょう。

○今日の授業で分かったこと、気づき	理解度（理解できた←　5　4　3　2　1　→理解できていない）

数学－２（数学Ⅱ）　常用対数を活用して 2^n の桁数を求めることを通して、対数関数の有用性を認識させる事例

【学習活動の概要】

１　単元名　　指数関数・対数関数　～対数関数（常用対数）～

２　単元の目標

指数関数および対数関数について理解し、それらを事象の考察に活用できるようにする。
自然数の桁数について考察することによって、対数関数を日常の事象にも活用できるようにする。

３　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
対数関数に関心をもつとともに、対数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識し、事象の考察に活用しようとしている。	対数関数を用いて事象を考察し、表現したり、その過程を振り返ったりすることを通して、関数的な見方や考え方を身につけている。	対数の値を求めたり、対数関数を用いて数量の変化を表現したりすることができる。	対数や対数関数の基本的な概念、性質などを理解し、知識を身につけている。

４　単元の概要

指数関数、対数関数の計算は、規則を覚えて式変形していくというパターン化された問題が他の単元よりも多いと感じる分野である。教科書の例題でも、具体的な事象の問題から立式して解くという問題が出てきてはいない。指数・対数は、日常生活とかけ離れたものであるという認識を持っている生徒が多いのではないかと思う。できるだけ多くの生徒に、この分野は生物や物理など多くの道に進む際に必要な知識を学んでいるということを実感してもらいたいと考えた。

この単元の中で桁数の問題は、対数関数を利用することによって事象の考察ができたと実感しやすい内容であると思い、題材に選んだ。桁数の問題は、生徒たちの中では「常用対数をとって計算して、整数ではさんで大きいほうの数が答」という解法の手順だけ浸透しているように思える。簡単な問題は考査等での正答率が高いが、なぜ常用対数をとるのか、なぜ大きいほうの数が桁数になるのかをきちんと理解できていない生徒がほとんどであるように思える。今回は、実際に 2^n（$n=1, 2, 3, \cdots$）を計算してみることによって常用対数をとることの必要性や、その数字が答になる意味について生徒たちが吸収できるようにという考えのもとで、授業の流れを考えた。

５　単元の指導計画

次	学習活動	深い学びに関する指導上の留意点
５時間	対数とその性質 対数関数 常用対数	
６時間目（本時）	常用対数の応用① 『2^n は何桁の数字か』 ・グループで計算する。 手が止まっている生徒には、理解している生徒がホワイトボードで説明する。	「まずは、計算しやすい小さい n について考えてみよう」 ・生徒を４人グループにし、プリントを配付して、$n=1, 2, \cdots$として計算させて取り組ませる。

$2^1=2$　　　1桁 $2^2=4$　　　1桁 … $2^{10}=1024$　　4桁 $2^{20}=$　　　　桁 $2^{20}=(2^{10})^2=1024^2=1048576$ となり、７桁になることに気付く。	・手が止まっているグループに声かけをする。 ・全体の状況を見て、行き詰まっている班が多い場合、気付いた生徒を指名して、黒板で発表させる。
・つづきに取り組む。 $2^{30}=(2^{10})^3=1024^3=1073741824$　10桁 $2^{40}=(2^{10})^4=1024^4=1099511627776$ 13桁	・桁数だけを予想できている生徒がいる場合、指名して、なぜ判断できるのか聞いてみる。 「桁数が変わるのはどこかに注目して、桁数について考えてみよう。」
・値は出せないが、桁数だけは予想して書き込む生徒が出てくるかもしれない。 「４桁、７桁、10桁、13桁ときたので、数列で予想した。」 「９は１桁、10は２桁、99は２桁、100は３桁、999は３桁、1000は４桁…」 $10^{n-1}\leqq x<10^n$ のとき、x は n 桁	$10^{○}\leqq 600<10^{○}$　　3桁 $10^{○}\leqq 1500<10^{○}$　　4桁 ○の中は？
・2^{1000} は何桁の数字か 「10乗が４桁、20乗が７桁、30乗が10桁…なので、1000乗は301桁になる。」と予想する。 グループで話し合う。 「対数にする。」 「底を10にすれば、指数だけになる。」	
・$10^{n-1}\leqq 2^{1000}<10^n$ の全辺に底を10とする対数をとると $\log_{10}10^{n-1}\leqq\log_{10}2^{1000}<\log_{10}10^n$ $(n-1)\log_{10}10\leqq 1000\log_{10}2<n\log_{10}10$ $n-1\leqq 1000\times 0.3010<n$ $n-1\leqq 301<n$ よって　$n=302$ 302桁	・$10^{n-1}\leqq 2^{1000}<10^n$ のとき、2^{1000} は n 桁 「10が邪魔なので、10を消したいんだけれども、いい方法はないかな。指数だけにしたい。」 ←前時に $\log_{10}2=0.3010$ として計算する方法を扱っている。 「予想がはずれた理由は… $2^{10}=1.024\times 10^3$ $10^3\leqq 2^{10}<10^4$ となるので、４桁となる。 $2^{20}=(2^{10})^2=(1.024\times 10^3)^2=1.024^2\times 10^6$ 1.024は２乗しても10より大きくならないので $10^6\leqq 2^{20}<10^7$ となり、７桁になる。 $2^{1000}=(2^{10})^{100}=(1.024\times 10^3)^{100}$ $=1.024^{100}\times 10^{300}$ もしも、$10^{300}\leqq 2^{1000}<10^{301}$ ならば、301桁 でも、1.024^{100} が10より大きければ、 $10^{301}\leqq 2^{1000}<10^{302}$ となって、302桁になる！！」
練習 「（１）アメーバが初日に２匹いる。２日目にはそれぞれが２匹に分裂する。毎日同じ分裂を繰り返すとき80日目にはおよそ何匹になっているか」 「（２）そのアメーバが最初に100万匹を越えるのは何日目か」 ・グループで考える。 （１）$10^{n-1}\leqq 2^{80}<10^n$	

	の全辺に底を 10 とする対数をとると $\log_{10}10^{n-1} \leqq \log_{10}2^{80} < \log_{10}10^{n}$ $(n-1)\log_{10}10 \leqq 80\log_{10}2 < n\log_{10}10$ $n-1 \leqq 80 \times 0.3010 < n$ $n-1 \leqq 24.08 < n$ 10^{24} 以上 10^{25} 未満匹 （２） $10^{6} \leqq 2^{x}$ の両辺に底を 10 とする対数をとると $\log_{10}10^{6} \leqq \log_{10}2^{x}$ $6\log_{10}10 \leqq x\log_{10}2$ $6 \leqq x \times 0.3010$ $19.93\cdots \leqq x$ 20 日目	進んでいないグループに声がけをする。 「常用対数は星の明るさとかにも使われているみたいです。興味があったら調べてみてください。」
次時	常用対数の応用②	

【解説】

【指導事例と学習指導要領の関連】

① 最初、桁数を予想する点

⇒既習事項である数学Ｂ「数列」の等差数列の考え方を用いて予想している。

② 大きな数に対して、対数を用いればおおよその数の大きさが考えやすいと気付く点

⇒「高等学校学習指導要領　第２章　第４節　第２款　第２　数学Ⅱ」

２　内容　（３）指数関数・対数関数　イ　対数関数　（ア）対数

「対数の意味とその基本的な性質について理解」の部分に当たる。これは「数学Ⅱ」の目標にある「事象を数学的に考察し表現する能力を養うとともに、それらを活用する態度を育てる」ということに相当する。

③ 桁数が予想とずれた理由について解説を聞く点

⇒高等学校学習指導要領「数学Ⅱ」の目標にある「事象を数学的に考察」するために必要な思考の流れを身につけることができる部分であり、今後、生徒が何か新しい問題に取り組む際に必要となる力の育成につながる。

【深い学びの実現に向けた工夫】

○ 考えを深める

プリントで桁数を計算する際、３～４人のグループになり、各グループに１枚ホワイトボードを配付し、計算や考えを共有できるようにした。

○ 生徒に結果を予想させる

最初に桁数を 2^1，2^2，…，2^{10}，2^{20}，…と計算させてみた。2^{40} あたりで多くのグループは計算ができなくなり、続きは計算ではなく予想で求める流れになった。

10 乗増えるごとに桁数が３ずつ増える
ことを見つけ、数列を書き出すグループ

○ 考えの共有

予想した 2^{1000} の桁数を各グループで発表させる。この授業の際は答だけを確認したが、どのようにその答を導いたのかをきちんと共有することができていれば、その後の、予想がはずれて驚くという部分から、さらなる授業の深まりにつなげやすかったはずである。

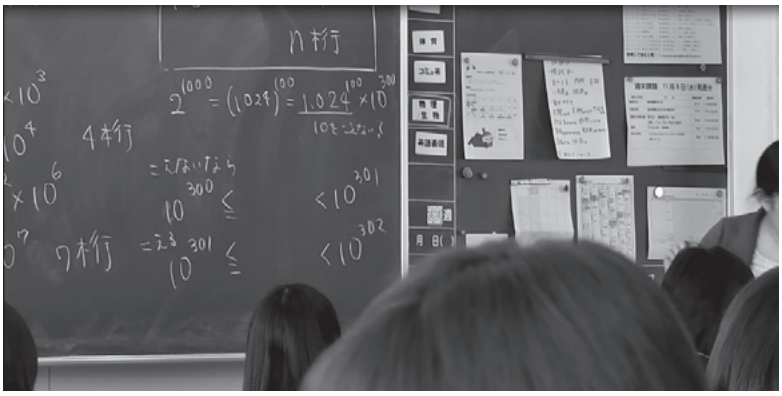
○ 既習事項を使えないか考える

2^{1000} の桁数を計算する際に、$10^{n-1} \leqq 2^{1000} < 10^{n}$ の指数に注目させ、10 を消去する方法を考えるように促した。この授業では、「常用対数」と自信をもって答えてくれる生徒は出てこなかったが、数人の生徒は気付いていたようである。日ごろから、全体への発問をもっと増やし、怖がらずに答える習慣をつけていく必要があると思う。

○ 予想がはずれ、どうして違うのか考える

予想では（等差数列から導き出された）301 桁という答のグループが多かった。しかし、常用対数を用いて計算した結果、302 桁が答であるとわかる。この授業の際は、なぜ予想と違う答になったのかを教師の説明という形で提示したが、どうして違うのかについてヒントを出しながら進めていくことによって、生徒でも気付けたはずである。時間をもう一時間取ることができるなら、次回この単元を指導する際に挑戦したい。

ヒント「$2^{10} = 1.024 \times 10^{3}$ であり、$10^{3} \leqq 2^{10} < 10^{4}$ となるので、４桁となる。」



1.024	1乗	1.024
1.024	2乗	1.048576
1.024	3乗	1.073741824
1.024	4乗	1.099511628
	…	
1.024	20乗	1.606938044
	…	
1.024	30乗	2.037035976
	…	
1.024	40乗	2.582249878
	…	
1.024	90乗	8.452712498
	…	
1.024	97乗	9.979201548
1.024	98乗	10.21870238
1.024	99乗	10.46395124
1.024	100乗	10.71508607

この授業の際は、「1.024^{100} はきっと 10 を越えるんだろうね」という説明で終わってしまったが、事前に計算しておいて、$1.024^{100} = 10.715\cdots$ であることを提示できたら、もっと生徒の理解が深まったのではないかと思う。

2^nは何桁の数字か考えよう。

計算スペース

	桁数
$2^1=$	
$2^2=$	
$2^3=$	
$2^4=$	
$2^5=$	
$2^6=$	
$2^7=$	
$2^8=$	
$2^9=$	
$2^{10}=$	
$2^{20}=$	
$2^{30}=$	
$2^{40}=$	
$2^{50}=$	
$2^{60}=$	
$2^{70}=$	
$2^{80}=$	
$2^{90}=$	
$2^{100}=$	

問　題　2^{1000}は何桁の数字か。

予想してみる。

予想はあっているのか。

練習

アメーバが初日に２匹いる。2日目にはそれぞれが２匹に分裂する。

（１）毎日同じ分裂を繰り返すとき８０日目にはおよそ何匹になっているか

（２）そのアメーバが最初に１００万匹を越えるのは何日目か

数学－３（数学Ⅲ）　複素数平面における基礎的事項の確認及び定着を図った事例～シンキングツール等を活用して～

【学習活動の概要】

１　単元名　　平面上の曲線と複素数平面　～複素数平面～

２　単元の目標

平面上の曲線がいろいろな式で表されること及び複素数平面について理解し、それらを事象の考察に活用できるようにする。

３　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
複素数平面を考えることにより、複素数の図形的側面が明らかになることを理解しようとする。	極形式を利用することで、複素数の乗法、除法の図形的意味を考察することができる。	複素数の乗法、除法の図形的意味を理解し、活用することができる。	複素数の基本的な概念、原理、法則および図形的意味を理解している。

４　単元の概要

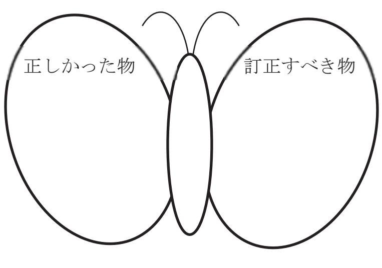
（１）授業の概要

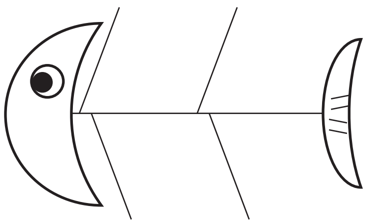
・数学Ⅲの教科書の学習を一通り終えた後、複素数平面の内容を活用していくために基本的な知識等の確認及び定着を図る。（複素数平面は、教科書での学習後しばらく時間が経過しており、久しぶりに扱う内容である。）

（２）教材

・シンキングツール（Ａ３）
・付箋
・まとめ用紙（Ａ４）

５　単元の指導計画

次	学習活動	深い学びに関する指導上の留意点
第１次	①　記憶を頼りに、覚えている複素数平面の分野における知識を水色の付箋に記入する。 ②　教科書を調べ直し、バタフライチャートで正しい知識と間違って覚えている物を区別する。 間違っていた物は桃色の付箋に書き直す。  	・次の学習活動②で、間違いを自分で訂正し、正しいものだけを揃えた上で、最終的な知識の整理を行うので、ここでは間違いを気にせず、思い出すことができた分だけ、自由に付箋に記入させる。 ・付箋の色を変えることで、本時の終了時点で曖昧だった部分を明確にできる。

	③　グループワークで、お互いの付箋を出し合い、フィッシュボーンでどんな場面で使う内容なのか分類をする。 	・生徒たちだけで分類項目を先に決めるのは困難だと思われる。お互い１枚ずつ出し合い、それをもとに仲間分けができれば分けさせたい。できなければ、１枚目の内容に似通っているものを出し合って、結果的に分類ができればよい。
	④　グループワークで分類したものに対して、何を根拠に分類したのか簡単なタイトルをつける。	・言葉に表すことでどんな学習をしているのか理解し、また他者へ説明できるようにする。
	⑤　席を立ち、他のグループの分類を見て比較・検討する。	・他者の考えを知ることで、多角的に複素数平面の問題を捉えられるようにする。

【解説】

【指導事例と学習指導要領の関連】

「高等学校学習指導要領解説　数学編　第２章　第３節　数学Ⅲ」

３　内容と内容の取扱い

（１）平面上の曲線と複素数平面

平面上の曲線がいろいろな式で表されること及び複素数平面について理解し、それらを事象の考察に活用できるようにする。

イ　複素数平面

（ア）複素数の図表示

複素数平面と複素数の極形式、複素数の実数倍、和、差、積及び商の図形的な意味を理解し、それらを事象の考察に活用すること。

（イ）ド・モアブルの定理

ド・モアブルの定理について理解すること。

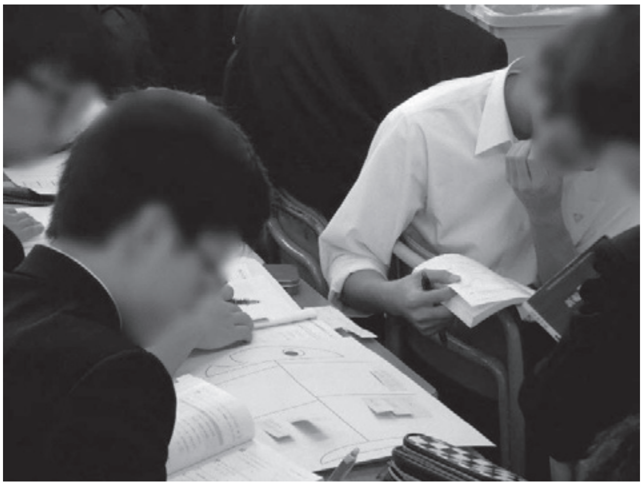
内容の取扱いについては、次のように示されている。

> ここでは、座標平面上の点に複素数を対応させることにより複素数平面を導入し、複素数平面上の各点が複素数を表していることを理解させる。その際、「数学Ｂ」の「ベクトル」を履修していれば、複素数の和、差及び実数倍の図表示を、ベクトルの和、差及び実数倍と関連付けて扱うこともできる。
> （中略）さらに、二つの複素数の積、商が…三角関数の加法定理を用いて導き、複素数の積、商の幾何学的な意味を理解させる。
> （中略）また、簡単な場合について、二項方程式 $z^n-a=0$ の解を複素数平面上に図示し、累乗根をその幾何学的意味と関連付けて扱う。これらの扱いを通して、複素数の諸演算が平面上の図形の移動などと関連付けられることを認識させるとともに、極形式による表現のよさを理解させる。

本指導事例では、複素数平面の演算に幾何学的な意味を結び付け、自発的に利用できるように知識を整理整頓することに重点を置いた。教科書で一通り学習した際に、平行移動や回転を話題には出したものの、内容が多く、一つ一つが単発になってしまいがちなため、生徒自身に全体を見渡し、複素数平面がどのようなものか考察し、今後活用できるようにさせたい。

【深い学びの実現に向けた工夫】

○　自分自身で知識の確認をする

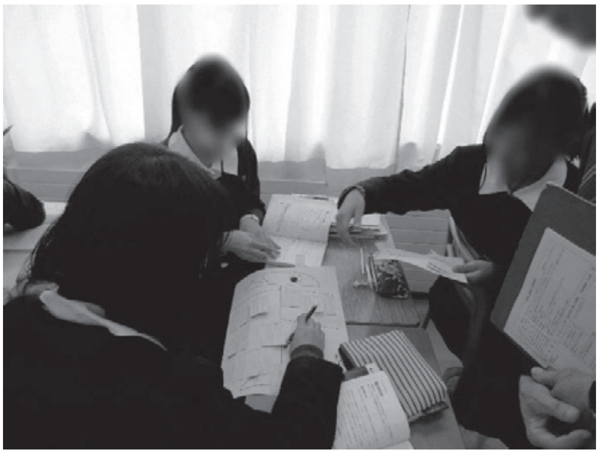


付箋を利用することで、ノートをきれいにまとめたい生徒も遠慮なく書き始めることができた。当初、授業計画の段階では、もっと記憶が残っていて次の段階に進めるものだと考えていたが、想定外に覚えておらず、間違って覚えている公式も多々あったため、次の学習段階に向けて使用するためにも、また正しい内容を復習するためにも調べ直す機会を取った。「次のグループワークで各自書いた付箋を出し合ってもらいます。」と伝えると、教科書を調べ直して訂正したり、不備を補ったりしていた。

「**５　単元の指導計画**」で提示した学習活動②は、授業後の協議で出たアイディアである。消しゴムやペンで直してしまうのではなく、「間違ったものも保存する」ことで学習効果は高められるのではないかと考えられる。

○　発問及びグループになったときの席の形に留意する

最初に生徒に投げかけたのは「みんなで書いた付箋を分類しよう。」だったが、生徒は何をどう分類すればいいのか検討もつかず動きが止まってしまった。その後、「４人でそれぞれ１枚ずつ出し合って同じものをまとめよう。」と言い直すと、１枚目を出し合い、２枚目、３枚目と付箋を追加していき、結果的に「これはこっちのグループの方が良くないか。」という生徒の会話も活発になった。また、普段からグループワークで議論させているが、会話だけだったため席の形も自由にやらせていた。今回はシンキングツールの用紙を１枚共有しての活動だったので、机を合わせた方が物を見て話しやすい。場面に合わせた形態と明確な指示が必要である。

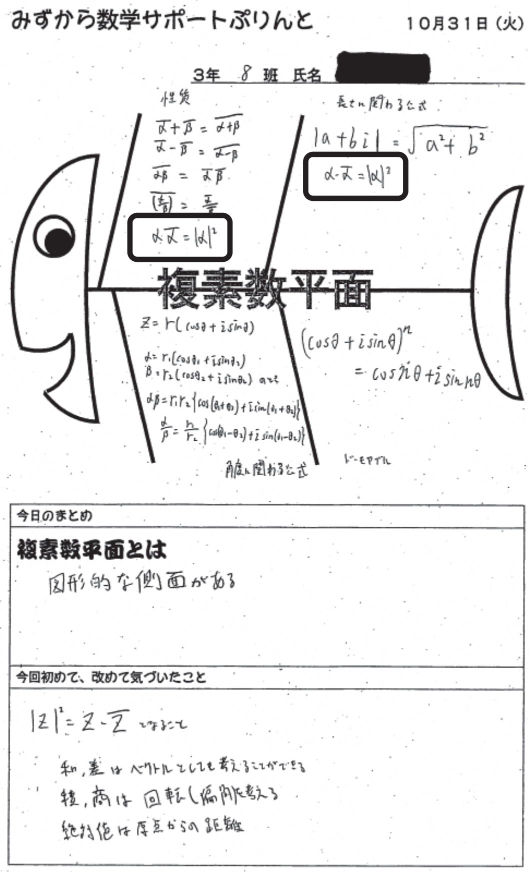


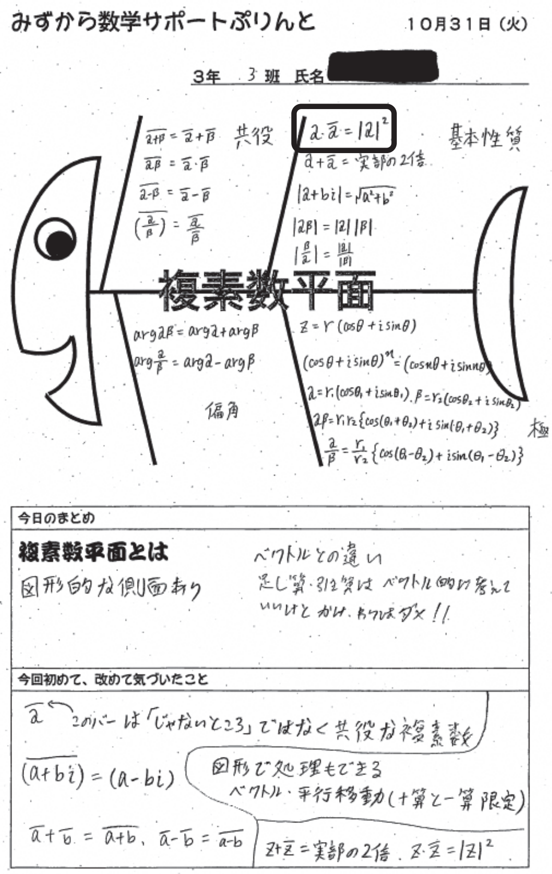
○　言語化させる

どんな根拠を持って分類したのか文字に起こすことで、自分自身が何を考えていたのかを客観的に振り返ることができる。「極形式」や「ド・モアブルの定理」など、教科書に書いてあった言葉をそのまま使用している生徒と、「角度に関するもの」と自分自身の言葉に噛み砕いていた生徒では、次の時間からの問題演習への取組状況は明らかに違った。

○　各グループでの分類を比較・検討する

着目する点が異なれば、グルーピングも異なった結果になる。次ページに生徒が活動で使用したまとめプリントを示す。



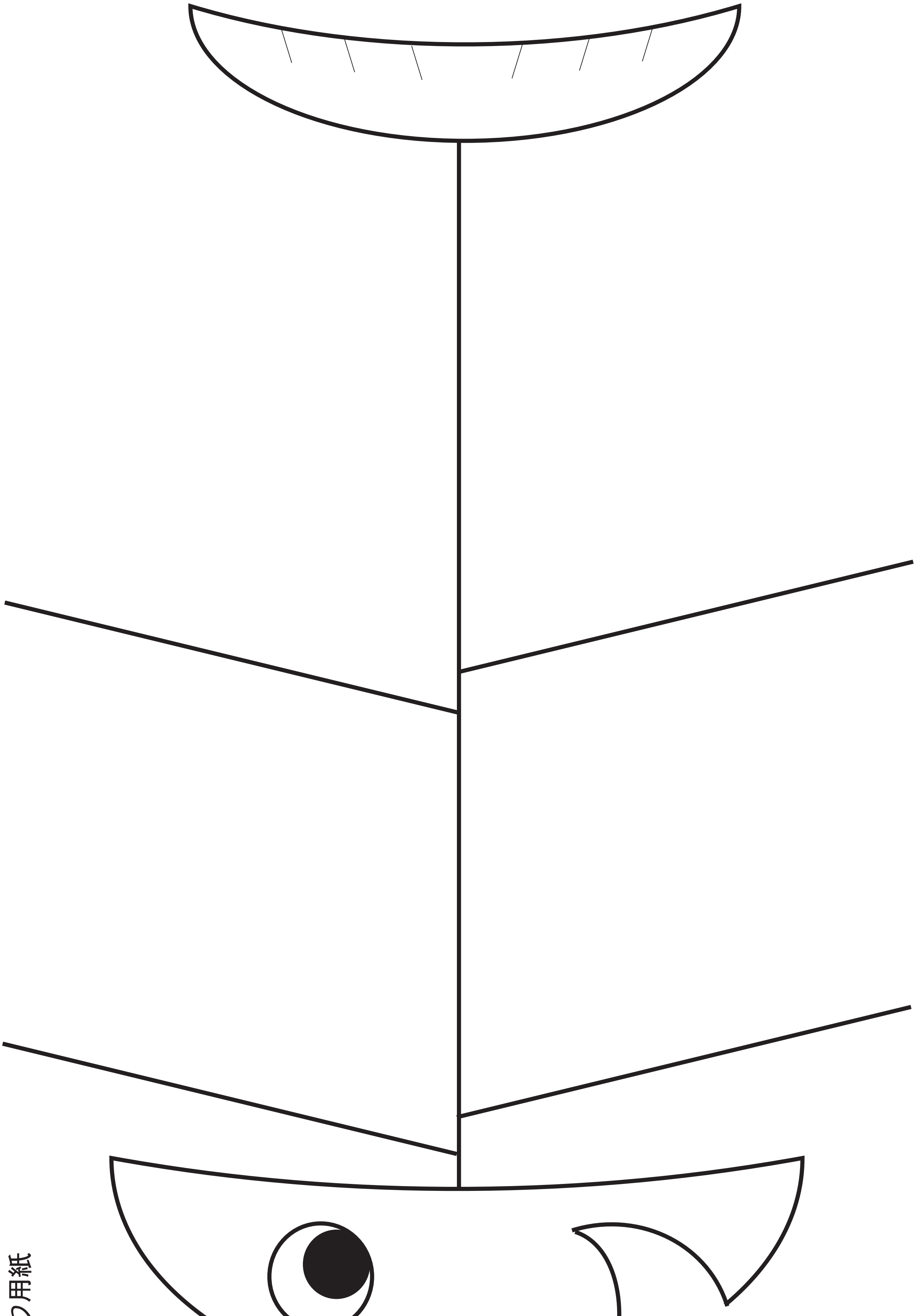


ほとんど同じような分類ではあるが、左の生徒は $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$ を２つのグループに入れている。分けるという意味ではあまり適切ではないかもしれないが、このように他者の結果を目にすることで、右の生徒は絶対値の２乗と共役複素数の関連を再認識することができたのではないかと思う。

今回の授業では、個人に発問してどのように分類したかを答えさせる形態を取ったが、あまり効果的ではなかったように思われる。その理由としては、形に残らないことが考えられる。「**５　単元の指導計画**」の学習活動⑤「見て回る活動」は、実際の授業では翌日の授業時に実施したが、生徒からは「そういう分け方もあるのか」といった声が上がっていた。

○　シンキングツールを活用する

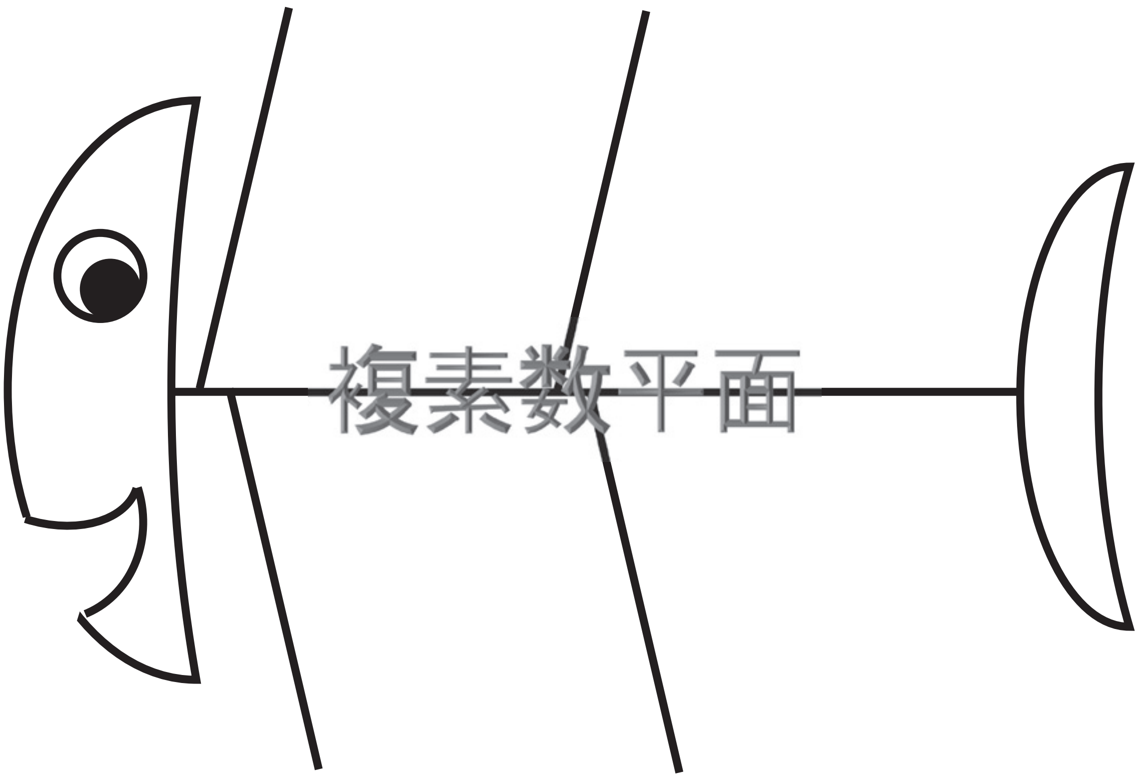
生徒に対して「考えろ」とは言うものの、実際に何をどう考えればいいかの提示が明確にできていなかったと感じていたため、シンキングツールの活用を考えた。生徒の取組の中で、長さや角度といった図形に関する項目で分類するグループも多く見られ、本時の目標であった複素数平面の知識を積極的に活用する態度を身に着けさせるための深い学びにつながったと感じている。



グループワーク用紙

みずから数学サポートぷりんと　　　　　　10月31日（火）

3年　　　班　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿



今日のまとめ
複素数平面とは
今回初めて、改めて気づいたこと

数学－４（数学Ａ）

累乗の余りの一般化（フェルマーの小定理）について考えることにより、余りの性質や累乗の余りの周期性についての理解を深める事例

【学習活動の概要】

１　単元名　　整数の性質　～整数の割り算と商・余り～

２　単元の目標

整数の性質について理解し、それらを事象の考察に活用できるようにする。

３　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
自然数を素因数分解したときの素因数に着目して解く応用的な問題について、その考え方に興味をもち、取り組もうとする。	整数 a を正の整数 b で割る割り算を a と b の間に成り立つ等式としてとらえることができる。	２つの整数 a, b を除数と余りを用いて表し、$a+b$ などの余りを求めることができる。	偶数、奇数の文字による表し方を理解し、それを利用して簡単な整数の性質を証明することができる。

４　単元の概要

（１）授業の概要

・累乗の余りの一般化（フェルマーの小定理）について考えることで、余りの性質や累乗の余りの周期性について考える。

（２）教材

・授業プリント

５　単元の指導計画

次	学習活動	深い学びに関する指導上の留意点
第１次	①　2^n を p で割った余りが 1 になるような n の値を p で表す。	・一般化するためには、まず具体的な値を代入し、実験しながら指数が満たす規則を見つけることを経験させる。
	②　$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ がどんな a の値でも成り立つかどうか具体的に確かめる。	・底を変化させることで、互いに素である性質に自ら気付かせる。
	③　p を素数、a は p と互いに素な自然数とするとき $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ が成り立つことが予想される。	・自らの手でフェルマーの小定理が成り立つことを予想させる。
	④　フェルマーの小定理を示す。	・証明をすることで予想と証明の違いを感じ、整数の理論への関心を深めさせる。
	⑤　振り返りを行う。	・定理を導く過程で気付いた性質はないか振り返り、言葉に表すことで整数の性質に対する理解をさらに深めさせる。

【解説】

【指導事例と学習指導要領の関連】

「高等学校学習指導要領解説　数学編　第２章　第４節　数学Ａ」

３　内容と内容の取扱い

（２）整数の性質

整数の性質についての理解を深め、それを事象の考察に活用できるようにする。

ア　約数と倍数

素因数分解を用いた公約数や公倍数の求め方を理解し、整数に関連した事象を論理的に考察し表現すること。

内容の取扱いについては、次のように示されている。

二つの整数 a，b（$a>0$）について、$b=aq+r$（$r=0$，1，2，…，$a-1$）という表現や割り算の余りによる分類を利用して整数の性質を考察させることも考えられる。

本指導事例では、学習指導要領の範囲外ではあるが、合同式を用いながら余りの演算を行っている。定理を導く計算過程の中で、余りの計算において成り立つ性質が確認させたり、余りの周期性に着目させたり、互いに素という性質に気付かせるなど様々な整数の性質を考察できるように促した。

【深い学びの実現に向けた工夫】

○　**定理を教えるのではなく、自分たちで導き出させた**

普段の授業では、教師が一方的に定理を提示し、証明を見せることが少なくない。しかし、本時の授業では生徒自ら法則に気付き、一般化して定理を導き出していく構成にした。具体的な値を代入しながら法則に気付き一般化するという考え方は、数学的に深い学びであると考える。

○　**グループによる支援と教員による支援**

具体的な値による実験や一般化する考え方など作業のハードルが高い部分も多かったため、他人の意見を参考にするだけでなく、サポートとしてグループ学習を機能させた。また、それだけでは不十分な場面では各グループおよび全体に対して適宜助言を与えるなどの支援を行った。

実際の授業では活発にグループが機能していたとは言い難いが、サポート機能は果たしていたため、高いハードルを求めた授業であったが、円滑に進めることができた。

○　**振り返りによる思考の整理と言語化及びその共有**

本時のねらいは、フェルマーの小定理を覚えることではなく、定理の導出過程の中で余りの性質や累乗の余りの周期性、互いに素、一般化するとはどういうことかなどの様々な数学的な気付きを得ることであったため、これらの振り返りが学びを深める最大のポイントであった。さらに、個人の気付きで終わらせず、グループで共有することで考えに広がりを持たせることを意識した。

実際の振り返りシートには、「一般化するときは具体的な数で考える」、「互いに素な性質の重要さ」、「余りには周期性がある」、「合同式は互いに素でないと割り算してはいけない」などの記述が見られ、本時のねらいが概ね達成できたように感じた。また、本時の授業を通じて生徒が合同式の処理に慣れていく様子も見られた。その後の定期考査でも累乗の余りに関する問題の理解度や答案における合同式の使い方を見ると本時の効果があったと感じた。

生徒番号（　　　　　）氏名（　　　　　　　　　　）

本時の目標

累乗の余りが１になる数を探すことで，累乗の余りの一般化を目指す。

ステップ１

2^n を素数 p で割った余りが１になるような n の値を p で表す。

ステップ２

$a^{\square}\equiv 1 \pmod{p}$ がどんな a の値でも成り立つか具体的に確かめる。

$\boxed{\text{ステップ3}}$

p が素数，　　　　　　　　　　　とするとき，

$a^{\square} \equiv 1 \ (mod\ p)$ が成り立つことが予想される。

本時の振り返り

1．要点整理（本時の学習内容）

※累乗の余りの一般化について考えようとしたか？　（　1　2　3　4　5　）

2．気付いたこと（数学的な気付き･見方･考え方，他の分野との関係，学習法など）

3．今後に生かせること

4．その他（要望などがあればここに）

数学－５（数学Ａ）　図形と関連付けることにより、ユークリッドの互除法の仕組みについての理解を深める事例

【学習活動の概要】

１　単元名　　整数の性質　～ユークリッドの互除法～

２　単元の目標

整数の性質についての理解を深め、それを事象の考察に活用できるようにする。

３　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
素因数分解をしなくても、互除法によって最大公約数が求められることに興味・関心をもつ。	互除法の計算から最大公約数を表す式が導かれることを具体例から考察し、一般にも適用できることに気付く。	互除法を利用して $ax+by=c$ を満たす整数 x, y の組を求めることができる。	互除法の原理を理解し、互除法を用いて２数の最大公約数を求めることができる。

４　単元の概要

（１）授業の概要

・ユークリッドの互除法を用いて最大公約数を求める方法を理解する。

・「正方形敷き詰め問題」を通して、ユークリッドの互除法の仕組みを視覚的に理解する。

（２）教材

演習プリント、方眼紙

５　単元の指導計画

次	学習活動	深い学びに関する指導上の留意点
第１次	①　２数の最大公約数を求める問題を３題解く。大きい自然数を扱う問題を含め、素因数分解による解法の困難性を実感する。	・素因数分解による解法では、大きい自然数の場合に困難が伴うことを実感してもらい、ユークリッドの互除法の有用性の実感につなげる。
	②　ユークリッドの互除法を紹介し、先の問題の一部について、ユークリッドの互除法を用いて求める。扱う自然数が大きい場合に、ユークリッドの互除法の有用性を実感させる。	・大きい自然数でも、２数の除法の繰り返しで最大公約数を求めることができる。素因数分解と比較して、互除法の有用性を実感させる。
	③　「正方形敷き詰め問題」を通して、ユークリッドの互除法の仕組みをグループワークによって考える。	・具体的な２数（84 と 108）を用いて、ユークリッドの互除法の式と、図形を対応させながら、互除法の原理をグループで考え、発表させて、クラス全体で共有する。

【解説】

【指導事例と学習指導要領の関連】

「高等学校学習指導要領解説　数学編　第２章　第４節　数学Ａ」

３　内容と内容の取扱い

（２）整数の性質

整数の性質についての理解を深め、それを事象の考察に活用できるようにする。

イ　ユークリッドの互除法

整数の除法の性質に基づいてユークリッドの互除法の仕組みを理解し、それを用いて二つの整数の最大公約数を求めること。

内容の取扱いについては、次のように示されている。

> 整数の除法の性質に基づいて、ユークリッドの互除法を理解させ、二つの整数の最大公約数を求められるようにする。指導に当たっては、具体例を通して、その手順の持つ意味を理解させることに重点を置き、単なる計算練習に陥らないよう留意することが大切である。

本指導事例では、ユークリッドの互除法の仕組みを、「正方形敷き詰め問題」を通して図形的な側面から理解させることに重点をおいた。また、授業前半には二つの大きな自然数の最大公約数を求めることの困難性を体験させ、ユークリッドの互除法の有用性が実感できるように促した。

【深い学びの実現に向けた工夫】

○　生徒間で解答の確認をさせる

既習事項については、解答をすぐに板書せず、普段から生徒同士で確認をさせるようにしている。生徒同士の互見により、特に下位層の生徒の集中力を持続させること、疑問点を生徒間で確認しやすく、したがって疑問の解消につながりやすいこと、そして「教える」ことにより知識が整理され、理解が深まることを狙いとしている。

○　素因数分解の困難性とユークリッドの互除法の有用性を比較させる

互除法の有用性を実感してもらうために、素因数分解の困難性を授業前半で体験してもらった。そのことにより、互除法に対する興味・関心が高まり、その仕組みの解明に意欲を持って取り組むことができた。

○　互除法の仕組みを図形的な側面から理解させるため「正方形敷き詰め問題」を用いた

互除法で扱った２数「84、108」について、84×108 マスの方眼紙を用いて、「正方形敷き詰め問題」に取り組ませた。このことにより、代数的に処理した式変形と、式が持つ図形的な側面とのつながりを考えることができた。

処理する２数が徐々に小さくなることと、正方形を切り取ったあとに残る長方形との対応を視覚的に確認できたことで、互除法の仕組みの理解につながった。

○　グループ活動を通して数学的な見方・考え方を獲得させる

普段の授業から、２人組での活動をさせている（「正方形敷き詰め問題」については生徒の様子から２人組では困難であると感じたため、４人組での活動に変更した）。

一人では到達できなかった見方や考え方に、グループでの対話を通して到達することを狙いとしている。各グループの発表をもとに、クラス全体で見方や考え方を獲得させることを目標としていたが、時間の制約から、１グループだけの発表にとどまった。ただ、発表者と授業者のやり取りを通して、ほとんどのグループが正方形を切り取ったあとの残った長方形に注目することができ、ユークリッドの互除法の仕組みを図形的に理解することができたと感じる。

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1 次の2数の最大公約数を求めよ。

例）　18，24

練習

(1)　84，108

(2)　391，299

2 ユークリッドの互除法

＜定理＞

> aをbで割ったときの商をq，余りをrとすると
> aとbの最大公約数は，
> bとrの最大公約数に等しい。

証明

aをbで割ったときの商をq，余りをrとすると

$a=\boxed{}\times\boxed{}+\boxed{}$　…①

と表せる。また，これを変形して，

$a-bq=r$…②

である。いま

aとbの最大公約数をm…(※1)，

bとrの最大公約数をn…(※2)

とする。

[1]　mはaとbの公約数であるから，②より

mは$\boxed{ア}$の約数

でもある。よって

mはbとrの$\boxed{イ}$

である。いま，(※2)より，bとrの$\boxed{最大}$公約数はnであったから

$m\ \boxed{ウ}\ n$　…③

である。

[2]　nはbとrの公約数であるから．①より

nは$\boxed{エ}$の約数

でもある。よって

nはaとbの$\boxed{オ}$

である。いま(※1)より，aとbの$\boxed{最大}$公約数はmであったから

$m\ \boxed{カ}\ n$　…④

である。

③，④より

$m\ \boxed{キ}\ n$

であるから，

aとbの最大公約数mは，

bとrの最大公約数nに等しい。

証明終わり

3 例）391と299の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求める。

391　＝　299　×　　＋　　　（391と299の最大公約数）

||

　＝　　×　　＋　　　（$\boxed{}$と$\boxed{}$の最大公約数）

||

　＝　　×　　＋　　　（$\boxed{}$と$\boxed{}$の最大公約数）

||

$\boxed{}$

$\boxed{4}$ 次の2数の最大公約数を，ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

(1)　108，84

(2)　629，259

(3)　841，377

$\boxed{5}$ 2辺の長さが，84，108の長方形を，できる限り大きい正方形のタイルで敷き詰めるとき，正方形の1辺の長さを求めよ。

数学－６（数学Ｂ） 群数列について、その特徴を分類しながら理解を深める事例

【学習活動の概要】

１　単元名　　数列　～群数列～

２　単元の目標

簡単な数列とその和及び漸化式と数学的帰納法について理解し、それらを事象の考察に活用できるようにする。

３　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
和の記号Σを用いることで、いろいろな数列の一般項や和が求められることに関心を示し、積極的に活用・考察している。	Σ計算により累乗の和やいろいろな数列の性質を考察し理解することで、身近な問題の解決に活用できる。	自然数の累乗の和と記号Σを用いて、数列の一般項や和を的確に求め処理することができる。	Σ計算と累乗の和を知識として理解することで、階差数列、分数列、群数列などいろいろな数列の性質の考察に活用することができる。

４　単元の概要

（１）授業の概要

・与えられた数列で気付くことを付箋に書き出す。その後、グループで内容をシェアする。
・書き出した付箋の正誤を吟味して分類する。
・正誤で分類した付箋を、今度は内容で整理し直して、カテゴリー別にタイトルをつける。
・他のグループが作成したチャートを見回り、自分たちが作成したものと比較する。
・ここまで整理した知識を基にして問題解決を図る。
・授業で学んだことを振り返る。

（２）教材

・３色の付箋
・手順プリント、演習プリント、振り返りシート
・Ｙチャート、バタフライチャート、データチャート

５　単元の指導計画

次	学習活動	深い学びに関する指導上の留意点
第１次 （２時間）	・もとの数列がどのような規則で与えられ、群のまとめ方がどのような規則に則っているのかを理解する。また、もとの数列で考える場合と、群の中で考える場合の対応関係を捉える。	・探究する上で必要な基本的な知識を確認する（等差数列や等比数列の一般項、和の公式など）。 ・具体的な数値でイメージを持たせてから、文字が入った場合の問題演習をする。
第２次 （１時間）	・分数からなる群数列について、グループで考察する。 ・数列を群に分ける有用性を理解した上で、問題を解決する。	・数列を見て気付いたことをグループで共有した上で、その内容を分類して、問題解決するために必要な情報を整理する。 ・他グループのチャートと比較することで、視野を広げて問題解決に臨ませる。 ・学習の最後に振り返りをし、知識を整理して問題解決する意義を確認する。

【解説】

【指導事例と学習指導要領の関連】
「高等学校学習指導要領　第２章　第４節　第２款　第５　数学Ｂ」
２　内容
（２）数列
ア　数列とその和
（イ）いろいろな数列
いろいろな数列の一般項や和について、その求め方を理解し、事象の考察に活用すること。

【深い学びの実現に向けた工夫】
○　シンキングツールの活用
生徒にとって分数からなる数列を群に分けて考察する問題は初見であった。そのため、単に「考えてみて」と指示しても何をすればいいのか分からない。そこで、数列を見て気付いたことを書き出し、整理することが、問題解決の糸口になると考える。また、ただ分類するのではなく、気付いたことを、正しいか正しくないのかを予想して分けた後に、内容ごとに整理するという手順を踏んだことで、自らの発見や予想を効率よく使って問題解決できる。

○　グループごとに考察させる
なるべく多くのアイディアを分類してほしいと考えたので、個人で気付いたことを書き出した後はグループで活動をさせた。リーダーシップを発揮して活動を円滑に進めることや、他者に分かりやすく説明することを通し、数学的に課題を解決する力とともに、コミュニケーション能力の向上が期待できる。

○　他のグループの考えと自分のグループの考えを比較する
各グループで同じことに気付いたとしても、その表現方法は多様である。そこで、課題解決をする前に、他のグループのチャートを見て自分のものと比較検討することで、「どのように自らのアイディアを表現すると他者に伝わるのか」ということを考える契機になる。また、自分にはない視点を取り入れることで課題解決に使える材料を増やすことができる。

○　課題を解決する上で重要なポイントを生徒が発見する
整理した知識をもとに、「群に分けて考察する」、「各群の最初や最後の数、項数に注目する」といったことを生徒自身が気付き、問題解決を図ることで、自主的に課題を解決していく態度を養うことができる。

○　授業の内容を振り返る
上手くいかなかったことを、同じ間違いをしないよう、どのように改善していくかをその日のうちに振り返ることが、次に課題解決を試みる際に役立つと考える。

○　数学に限らず、課題について知識を整理し、それを検証していく態度を育てる
社会で生きていく中で、経験したことのない問題に直面することは幾度とある。その際に大切なことは様々あると思われるが、
・他者の意見を聞き、自分の考えと比較、融合、区別し、様々な解決策が考えられる場合でも、有効なものは何なのかを考える。
・予想した解決策を実践し、それが本当に良かったのかを検証する。さらに、より良い方法がないのかを再考したり、失敗したら何が原因だったのかを振り返ったりする。
この２点は今回の群数列の課題解決を通して学習できると考える。

数学Ｂ　授業プリント　10月　　日

（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　）

今日の目標

①　数列に興味を持ち、その特徴について<u>分類しながら</u>考察する力を身につける。

②　数列を＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿を理解し、問題を解決することできるようになる。

考える数列

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\frac{1}{5},\cdots$$

ステップ１　【３分】

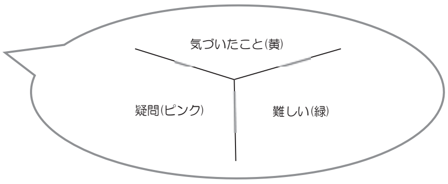
気づいたことを黄色、疑問に思ったことをピンク、難しく感じることを緑、それぞれの付箋に書き出す。

注意点　（１）気づいたことを優先的に書こう。（黄色の付箋をなるべく多く使おう）

（２）１つの付箋に１つの項目を書く。（なるべく短い表現で書こう）

ステップ２　【４分】

グループ内で自分の考えを発表し***Yチャート***に貼り付ける。（１人１分程度）

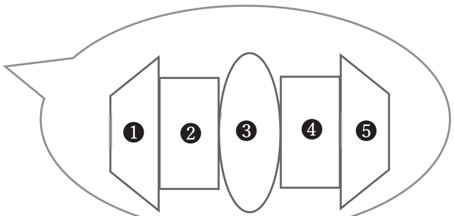


ステップ３　【４分】

黄色の付箋をピックアップし、***バタフライチャート***を使って

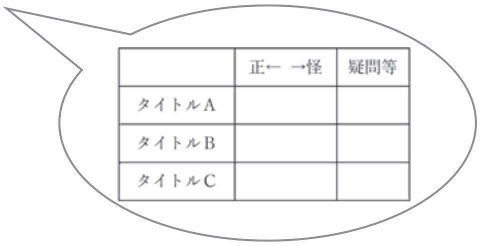
❶絶対正しいもの、❷おそらく正しいもの、❸推測のもの、

❹訂正が必要なもの、❺よく分からないもの　　に分類する。



ステップ４　【５分】

データチャートを使って付箋を仲間分けする。分類後、それぞれに**タイトル**をつける。



	正←　→怪	疑問等
タイトルA		
タイトルB		
タイトルC		

ステップ５　【４分】

他グループのデータチャートを、自分のグループと<u>比較しながら</u>見て回る。

ステップ６　【２０分】

ここまでで整理した知識を活用して問題の解決を図る。

問題　⑴　この数列の第 100 項を求めよ。

⑵　この数列の初項から第 100 項までの和を求めよ。

※　個人で考える（５分）→　グループで考える（７分）→　代表者の発表（８分）

ステップ７　【残り時間】

授業のまとめ、振り返り、シェアリング

※　備考

Yチャート
- アイディアを出す
- 多面的に見る

※今回は、付箋の色ごとにまとめられるように用いた。

バタフライチャート
- 理由づける
- 多面的に見る

※今回は、考えたことがどの程度正しいのかを整理するために用いた。

データチャート
- 理由づける
- 分類、分析する

※今回は、内容ごとに考えの正しさを考慮してまとめられるように用いた。

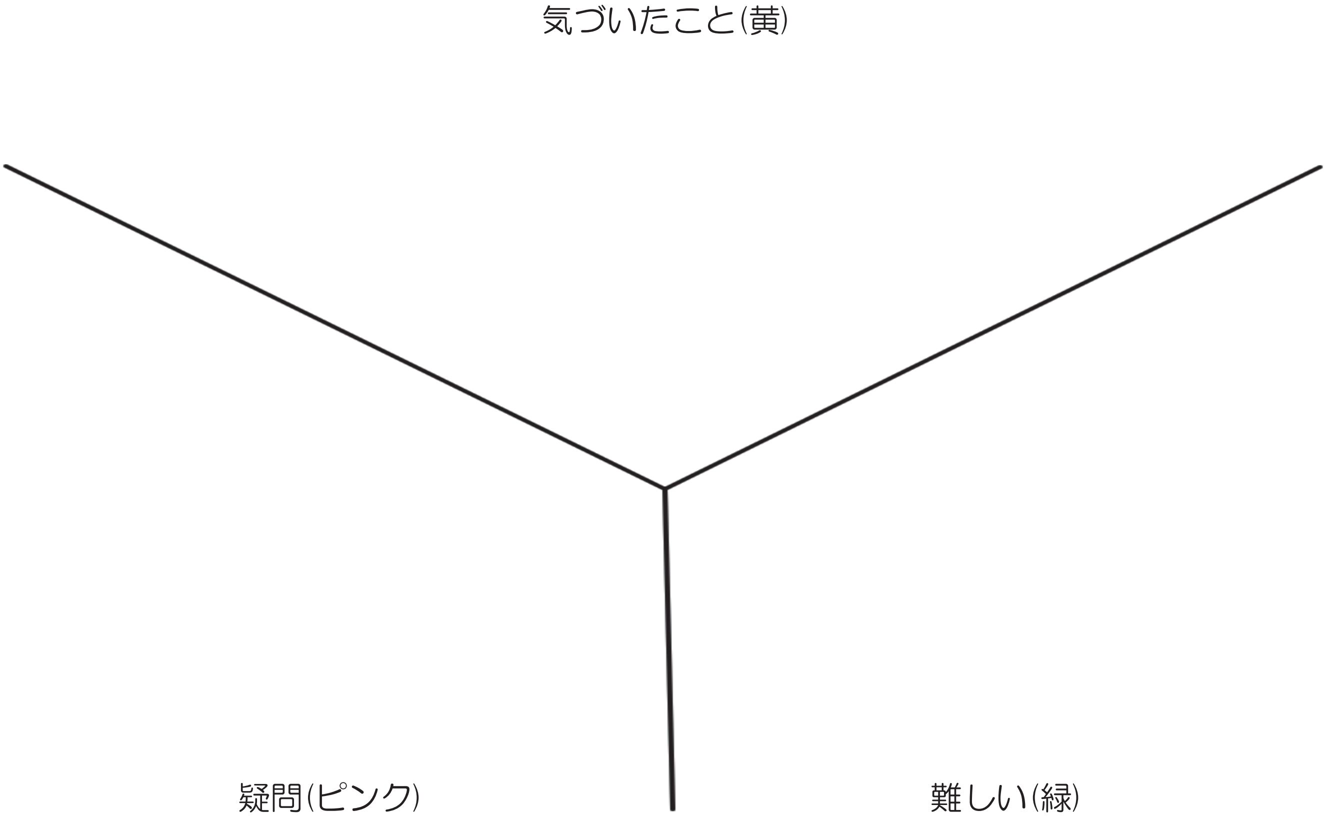
問　次の分数列について，次の問いに答えよ。

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

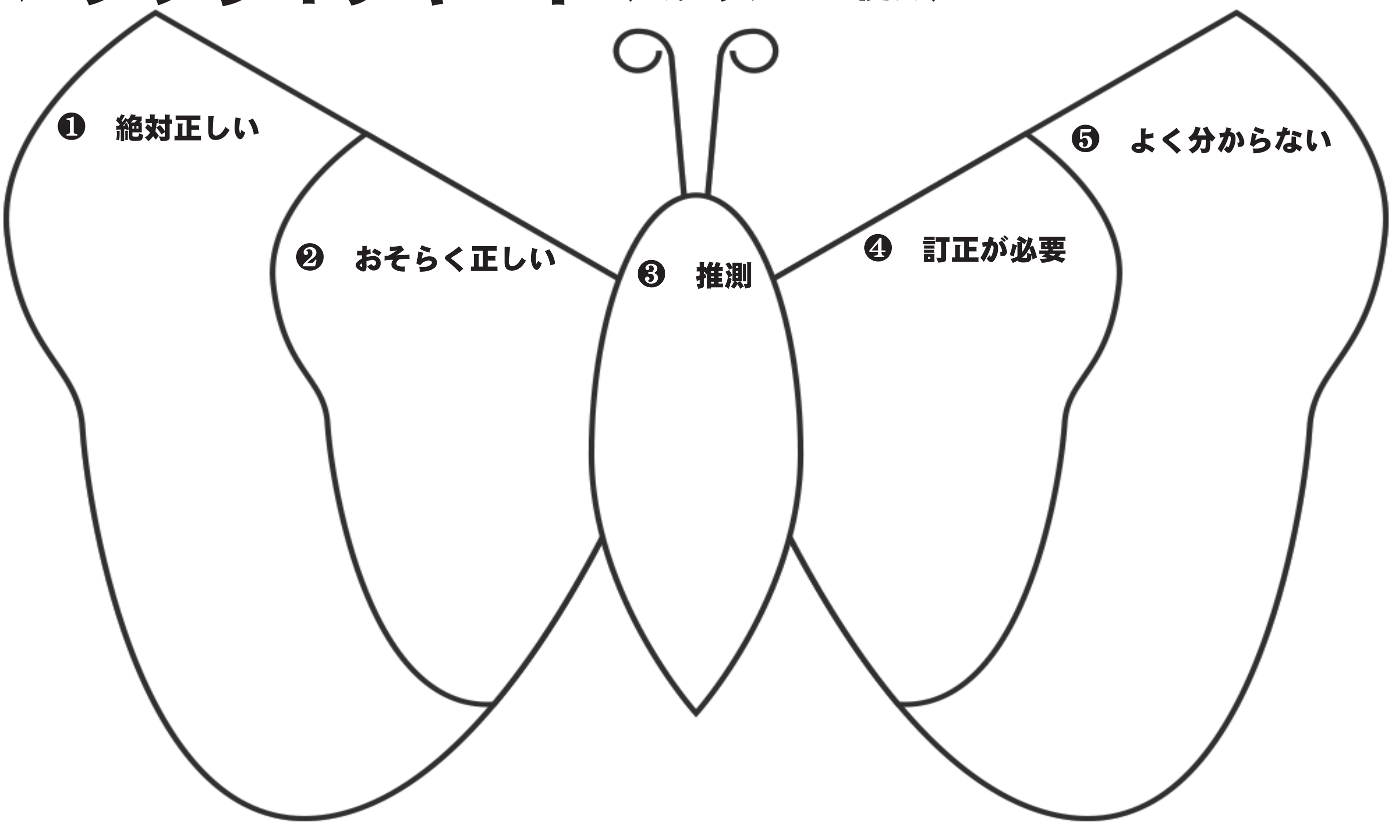
(1)　第 100 項 を求めよ。

(2)　初項から第 100 項までの和 S_{100} を求めよ。

Ｙチャート（ステップ２で使用）



バタフライチャート（ステップ３で使用）



データチャート（ステップ４で使用）

タイトル	正　⇔　怪	

～今日の授業を振り返って～

●授業の理解度（ １ ２ ３ ４ ５ ）【理由：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　】

●今日の授業で学んだこと

●授業の感想
